Санкт-Петербургский государственный университет

Чабан Игорь Алексеевич

Выпускная квалификационная работа

Адиабатическая связность и кривизна на пространстве модулей эллиптических кривых

Бакалавриат
“Математика”
Направление и код: 01.03.01 “Математика“
Шифр образовательной программы: СВ.5000.2017

Научный руководитель:
Главный научный сотрудник,
Факультет математики
и компьютерных наук,
Санкт-Петербургский
государственный университет,
Доктор физ.-мат. наук,
Петр Георгиевич Зограф

Рецензент:
Научный сотрудник,
Лаборатория “Современная
алгебра и приложения“,
Санкт-Петербургский
государственный университет,
Кандидат физ.-мат. наук,
Михаил Константинович Басок

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Введение

1.1 Обзор результатов

В различных квантовомеханических системах наблюдается явление фазы Берри [7], изучение которой представляет интерес как с физической, так и с геометрической точек зрения. Суть феномена заключается в следующем. Система определяется гамильтонианом, зависящим от набора параметров. Если в пространстве параметров пройти по замкнутому пути, то собственные состояния гамильтониана с фиксированной энергией преобразуются нетривиальным образом. В [1] исследуется фаза Берри для квантовой бесспиновой частицы в магнитном поле на двумерном торе (см. Раздел 2), система описывается гамильтонианом Ландау [5, с. 528, формула (113,1)] варьируемыми параметрами являются коэффициенты внутренней плоской метрики, а также коэффициенты Ааронова–Бома (компоненты векторного потенциала, определяющего магнитное поле). В статье [1] построен явный базис пространства основных состояний в терминах тета-функций Римана [6], [1, формула 14], а также найдена кривизна так называемой адиабатической связности [1, формула 15]. В данной работе мы вычисляем 1 - форму адиабатической связности (8.1), а также находим голономию вдоль различных петель (7.1, 7.2, 7.3). Отдельно стоит отметить, что нам удается найти естественное описание всех необходимых конструкций на языке голоморфных векторных расслоений над пространствами модулей. Так, например, мы показываем, что пространство основных состояний отождествляется с пространством глобальных голоморфных сечений определенного линейного расслоения над эллиптической кривой (см. Предложение 5.2), а адиабатическая связность соответствует эрмитовой связности [2] в некотором эрмитовом расслоении над пространством модулей $\mathcal{M}_{1,2}$ эллиптических кривых с двумя отмеченными точками (см. Раздел 8). Построение такой голоморфной модели представляет отдельный интерес и открывает возможность для дальнейших обобщений, интересных как с точки зрения физики, так и с точки зрения математики.

1.2 План

В Разделе 2 мы обсуждаем физическую постановку задачи и ее непосредственную математическую трактовку. В качестве основного результата в Разделе 2.2 мы получаем описание пространства основных состояний. Раздел 3 посвящен построению комплексной структуры на пространстве основных состояний. Это делается путем последовательной замены C^∞-объектов правильно подобранными голоморфными. В результате у нас получается полностью изоморфная модель, как мы показываем в Разделе 4. Более того, в Разделе 5 мы показываем, что гамильтониан исходной системы соответствует $\bar{\partial}$-лапласиану на некотором естественном пространстве.

В Разделе 6 мы описываем каноническую эрмитову связность на пространстве основных состояний, что позволяет нам вычислить ее голономию в Разделе 7.

Наконец, в Разделе 8 мы устаналиваем соответствие между построенной эрмитовой связностью и адиабатической, что позволяет нам доказать основную теорему (Теорема (8.1)).

1.3 Базовые обозначения

$$
\begin{aligned}
&dz = dz_1 + i dz_2, \quad d\bar{z} = dz_1 - i dz_2 \\
&\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{z_1} - i\partial_{z_2}), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{z_1} + i\partial_{z_2}) \\
&\partial = \partial_z dz, \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} d\bar{z} \\
&* \, dz_1 = dz_2, \quad *dz_2 = -dz_1, \\
&* \, 1 = \sqrt{\det g}\, dz_1 \wedge dz_2, \quad *dz_1 \wedge dz_2 = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \\
&* \text{ является } \mathbb{C} - \text{линейным оператором}: \\
&* \, dz = -i dz, \quad *d\bar{z} = i d\bar{z} \\
&* \, 1 = \frac{i}{2}\sqrt{\det g}\, dz \wedge d\bar{z}, \quad *dz \wedge \bar{z} = \frac{-2i}{\sqrt{\det g}}
\end{aligned}
$$

2 Формулировка физической задачи

Рассмотрим двумерный тор C_τ, представленный как фактор комплексной плоскости $\mathbb{C}$ по решетке $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, где $\tau \in \mathfrak{h} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \ \operatorname{Im}\tau > 0\}$ с индуцированной эвклидовой метрикой g_τ, нормированной так, чтобы мера тора равнялась V:

$$ds_\tau^2 = \frac{V}{\tau_2}(dz_1^2 + dz_2^2)$$

где $z = z_1 + iz_2$ - комплексная координата на $\mathbb{C}$.
Исследуем квантовомеханическую задачу о свободной бесспиновой заряженной частице на торе. Масса частицы $m = 1$, заряд частицы $e = -1$.
Гамильтониан системы:

$$H = \frac{|p|^2}{2},$$

где норма канонического импульса вычисляется относительно индуцированной метрики в кокасательном пространстве к данной точке C_τ.
Рассмотрим замену координат:

$$C_i \longrightarrow C_\tau$$
$$x + iy \longmapsto x + \tau y$$

Матрица $(g_\tau)_{ij}$ метрики и обратная матрица $(g_\tau)^{ij}$ (соответствующей метрики в кокасательном пространстве) в этих координатах имеют следующий вид:

$$(g_\tau)_{ij} = \frac{V}{\tau_2}\begin{pmatrix} 1 & \tau_2 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix} \qquad (g_\tau)^{ij} = \frac{1}{V\tau_2}\begin{pmatrix} |\tau|^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Гамильтониан в новых координатах:

$$H = \frac{V}{\tau_2}(|\tau|^2 p_x^2 - \tau_1(p_x p_y + p_y p_x) + p_y^2)$$

В рассматриваемой задаче однородное магнитное поле перпендикулярно поверхности тора и создает поток

$$\Phi = -2\pi B, B \in \mathbb{N}$$

Здесь используются единицы, в которых $\hbar = 1, c = 1, |e| = 1$, поэтому квант магнитного потока

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|e|}$$

равен 2π.
Таким образом, магнитное поле H имеет следующие ковариантные компоненты:

$$H = (0, 0, H_3)$$

где

$$H_3 = -\frac{2\pi B}{V}$$

При квантовании в магнитном поле оператор импульса имеет следующий вид:

$$\hat{p}_x = -i\partial_x + A_x$$
$$\hat{p}_y = -i\partial_y + A_y$$

где $\operatorname{rot} A = H$.
Для выбранной метрики в ковариантных координатах это условие записывается так:

$$H_3 = \frac{1}{V}(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

С точностью до калибровочного преобразования любое A (при $A_3 = 0$), удовлетворяющее этому уравнению, имеет ковариантные компоненты:

$$A_x = 2\pi By + 2\pi(\phi_1 + \frac{B}{2}), \quad \phi_1 \in \mathbb{R}$$
$$A_y = 2\pi(\phi_2 + \frac{B}{2}), \quad \phi_2 \in \mathbb{R}$$

Параметры ϕ_1, ϕ_2 удобно объединить в один комплексный параметр

$$q = \phi_2 - \tau\phi_1 \in \mathbb{C}$$

Таким образом, гамильтониан переписывается следующим образом:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\tau,q} = \frac{1}{2V\tau_2}(|\tau|^2 D_x^2 - \tau_1(D_x D_y + D_y D_x) + D_y^2)$$

где

$$D_x = -i\partial_x + 2\pi By + 2\pi(\phi_1 + \frac{B}{2})$$
$$D_y = -i\partial_y + 2\pi(\phi_2 + \frac{B}{2})$$

Квантовомеханическая задача сводится к решению уравнения

$$\hat{H}_{\tau,q}\psi = E\psi \tag{2.1}$$

где волновая функция ψ имеет следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \psi(x + 1 + \tau y) &= \psi(x + \tau y) \\ \psi(x + \tau(y + 1)) &= e^{-2\pi iBx}\psi(x + \tau y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1 Определение Адиабатической связности. Расслоения P' и $\mathcal{P}'$

Заметим, что функции, удовлетворяющие условиям (2.2), естественно рассматривать, как сечения некоторого C^∞-расслоения над тором $C_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$:

Определение 2.1. *L^τ — C^∞-расслоение над C_τ, которое определяется квазипериодическими условиями (2.2).*

Напомним, что $\mathfrak{h} = \{\tau \in \mathbb{C} \ | \ \operatorname{Im}\tau > 0\}$ обозначает верхнюю полуплоскоть. Заметим, что уравнения (2.2) никак не зависят от параметра q, возникающего в задаче, и пространства волновых функций, фактически, могут быть параметризованы точками из $\mathfrak{h}$. Однако, присутствие параметра q удобно сохранять для дальнейших целей. Итак, в качестве конфигурационного пространства, параметризующего всевозможные волновые функции, можно рассматривать тотальное пространство следующего расслоения на $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$:

Определение 2.2. *Пусть P' — пучок $\mathbb{C}$-векторных пространств на $\mathfrak{h}\times\mathbb{C}$, сечениями которого над $U \times V \subset \mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ являютя C^∞-функции $F : \mathbb{R}^2 \times (U \times V) \to \mathbb{C}$ такие, что при всяком $(\tau, q) \in U \times V$ ограничение $F(\cdot, \tau, q)$ удовлетворяет условиям (2.2). Соответствующее C^∞-расслоение над $\mathfrak{h}\times\mathbb{C}$ будем тоже обозначать через P'. Заметим, что слои P' естественным образом отождествляются с $\Gamma(L^\tau)$ (тут $\Gamma(E)$ обозначает пространство C^∞-сечений расслоения E).*

Заметим, что P' — тривиальное расслоение: все слои отождествляются с $\Gamma(L^i)$ оператором замены координат:

$$U_\tau : \Gamma(L^\tau) \longrightarrow \Gamma(L^i)$$
$$(U_\tau f)(x, y) = f(x + \tau y)$$

Расслоение P' снабжается эрмитовой метрикой, которая задается эрмитовым скалярным произведением на $\Gamma(L^\tau)$:

$$\langle\psi, \chi\rangle = \int_{\mathcal{C}_\tau} dVol(g_\tau)\bar{\psi}\,\chi = V\int_0^1\int_0^1 dxdy\bar{\psi}(x, y)\chi(x, y)$$

Базовым объектом нашего исследования является пространство решений (2.1) с наименьшим E.

Определение 2.3. *Для фиксированных $\tau \in \mathfrak{h}, q \in \mathbb{C}$ пространство решений (2.1) с наименьшим E будем называть «пространством основных состояний».*

Лемма 2.1. *Наименьшее собственное значение E для гамильтониана $H_{\tau,q}$ равно $\frac{\pi B}{V}$. Пространство основных состояний имеет размерность B.*

Доказательство. Мы докажем это утверждение позднее (см. 5.1), когда построим голоморфную модель пространства основных состояний. □

Определение 2.4. *Обозначим за $\mathcal{P}'$ векторное подрасслоение P', слоем которого над (τ, q) является $Ker(H_{\tau,q} - \frac{\pi B}{V}) \subset \Gamma(L_\tau)$.*

Определим «*адиабатическую*» связность ∇_a в $\mathcal{P}'$ с помощью формулы

$$\nabla_a \eta = Pr(d\eta)$$

где

$$d : C^\infty(\mathfrak{h} \times \mathbb{C},\ \Gamma(L^i)) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{h} \times \mathbb{C},\ \Gamma(L^i)) \otimes \Omega^1(\mathfrak{h} \times \mathbb{C})$$

— внешний дифференциал,

$$Pr : L^\tau \longrightarrow Ker(H_\tau - \frac{\pi B}{V})$$

— ортогональный проектор на собственное подпространство H_τ относительно введенного скалярного произведения.

2.2 C^∞-пространство модулей основных состояний. Расслоения E' и $\mathcal{E}'$

Теперь, используя обозначения, введенные выше, мы опишем C^∞-версию пространства модулей основных состояний. Это пространство параметризует векторы из собственных подпространств гамильтонианов $H_{\tau,q}$, соответствующих минимальному E, с точностью до естественных изоморфизмов, которые в данном случае соответствуют модулярным преобразованиям. Гамильтонианы $H_{\tau,q}$ определяются парами (g, A), где g — плоская метрика на C_i, A — класс калибровочно эквивалентных связностей в L^i с кривизной $-\frac{2\pi B}{V}$. Пары (g, A), в свою очередь, определяются двумя параметрами $(\tau, q) \in \mathfrak{h} \times \mathbb{C}$, однако, это соответствие неоднозначно: два набора параметров соответствуют одной паре тогда, и только тогда, когда они связаны модулярным преобразованием из $PSL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$, где $\big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (m, n)\big)$ действует следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathfrak{h} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{h} \times \mathbb{C} \\ (\tau, q) \longmapsto (\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, q' = \frac{q + m\tau + n}{c\tau + d}) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Действие $PSL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ продолжается на P', в соответствии со следующим действием $PSL(2, \mathbb{Z})$: для $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}), \tau \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} \gamma : \Gamma(L^{\gamma\tau}) &\longrightarrow \Gamma(L^\tau) \\ f &\longmapsto \gamma^* f \end{aligned}$$

где

$$(\gamma^* f)(x + \tau y) = f(x' + \tau' y') \exp\big[\pi i B\big((x' + 1)(y' + 1) - (x + 1)(y + 1)\big)\big]$$

$$x' + \tau' y = \frac{x + \tau y}{c\tau + d}$$

явное выражение для x', y':

$$\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= -cx + dy \end{aligned}$$

Лемма 2.2. *Подрасслоение $\mathcal{P}'$ инвариантно относительно этого действия.*

Доказательство. Для проверки инвариантности $\mathcal{P}'$ достаточно показать, что $\gamma^* H_{\tau',q'} = H_{\tau,q}$. Для удобства представим действие γ^* как композицию двух операторов

$$\begin{aligned} M : f' &\longmapsto f \\ f(x,y) &= f'(x',y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : f &\longmapsto Gf \\ (Gf)(x,y) &= \exp[2\pi i \alpha(x,y)] f(x,y) \\ \alpha(x,y) &= \frac{B}{2}\big((x'+1)(y'+1)-(x+1)(y+1)\big) \end{aligned}$$

Нам необходимо найти преобразование оператора

$$H_{\tau',q'} = \frac{1}{2V\tau_2'}\big(|\tau'|^2 D'^2_{x'} - \tau_1'(D'_{x'}D'_{y'} + D'_{y'}D'_{x'}) + D'^2_{y'}\big)$$

$$\begin{aligned} D'_{x'} &= -i\partial_{x'} + 2\pi(By' + \phi_1' + B/2) \\ D'_{y'} &= -i\partial_{y'} + 2\pi(\phi_2' + B/2) \end{aligned}$$

где

$$q' = \phi_2' - \tau'\phi_1'$$

явное выражение для ϕ_1, ϕ_2:

$$\begin{aligned} \phi_1' &= d\phi_1 + c\phi_2 \\ \phi_2' &= b\phi_1 + a\phi_2' \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$MH_{\tau',q'}M^{-1} = \frac{1}{V\tau_2}\big(|\tau|^2 \tilde{D}_x^2 - \tau_1(\tilde{D}_x\tilde{D}_y + \tilde{D}_y\tilde{D}_x) + \tilde{D}_y^2\big)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x &= M(aD'_{x'} - cD'_{y'})M^{-1} = -i\partial_x + 2\pi(a(By' + \phi_1' + B/2) - c(\phi_2' + B/2)) \\ \tilde{D}_y &= M(-bD'_{x'} + dD'_{y'})M^{-1} = -i\partial_y + 2\pi(-b(By' + \phi_1' + B/2) + d(\phi_2' + B/2)) \end{aligned}$$

Простая проверка дает

$$\begin{aligned} G\tilde{D}_xG^{-1} &= D_x \\ G\tilde{D}_yG^{-1} &= D_y \end{aligned}$$

поэтому

$$\gamma^* H_{\tau',q'} = GMH_{\tau',q'}M^{-1}G^{-1} = H_{\tau,q}$$

□

Замечание 2.1. *Адиабатическая связность также инвариантна относительно модулярных преобразований. Мы докажем это утверждение 8.1 с помощью дальнейших конструкций.*

Определение 2.5. *Фактор расслоения P' будем обозначать E', а соответствующее подрасслоение — $\mathcal{E}'$. Базой E' и $\mathcal{E}'$ является факторпространство $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ по действию (2.3). Образ Адиабатической связности будем также обозначать через ∇_a и по-прежнему называть «адиабатической». Тотальное пространство векторного расслоения $\mathcal{E}'$ будем называть C^∞-пространством модулей основных состояний.*

Одной из основных целей данной работы является вычисление голономии адиабатической связности.

3 Комплексная структура на пространстве модулей основных состояний

3.1 Пространство модулей $\mathcal{M}_{1,2}$.

Заметим, что каждой точке $(\tau, q) \in \mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ соответствует эллиптическая кривая $C_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ с двумя отмеченными точками, 0 и q. Более того, две такие точки задают одну и ту же отмеченную эллиптическую кривую тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите относительно действия (2.3) группы $PSL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$. Таким образом, факторпространство $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ по действию (2.3) естественным образом можно отождествить с пространством модулей $\mathcal{M}_{1,2}$ эллиптических кривых с двумя отмеченными точками [3, 4]. Напомним, что $\mathfrak{h}$ естественным образом изоморфно пространству Тейхмюллера [3, 4] для римановых поверхностей рода 1, откуда нетрудно вывести, что комплексная структура на факторе $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ по действию (2.3) соответствует стандартной комплексной струтуре на $\mathcal{M}_{1,2}$. Таким образом мы можем рассматривать $\mathcal{M}_{1,2}$ как комплексный орбифолд, соответствующий вышеописанному фактору. Далее мы будем придерживаться именно этого подхода.

3.2 Голоморфная версия $\mathcal{L}^{\tau,q}$ расслоения L^τ

Пусть $\mathcal{M}_{1,1}$ — пространство модулей эллиптических кривых с отмеченной точкой. Мы отождествлем его с фундаментальной областью $\{z \in \mathbb{C} \mid \ -1/2 \le \operatorname{Re} z \le 1/2, |z| \ge 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ действия $PSL(2,\mathbb{Z})$ на верхней полуплоскости $\mathfrak{h} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \ \operatorname{Im}\tau > 0\}$. Кривая C_τ, соответствующая $\tau \in \mathcal{M}_{1,1}$, отождествляется с тором $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, а отмеченная точка — с классом $0 = \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$.
Для каждой C_τ рассмотрим ее якобиан — семейство классов изоморфизма голоморфных расслоений степени 0. Якобиан эллиптической кривой параметризуется ее точками: точке $q \in C_\tau$ соответствует класс изоморфизма $\mathcal{O}([q]-[0])$, где $[q] \in Div(C_\tau)/\sim$ — класс дивизора q. Заметим, что якобиан действует свободно и транзитивно на множестве всех линейных расслоений степени 1 над C_τ. Отсюда легко заключить, что все такие расслоения имеют вид $\mathcal{O}([q])$. Хорошо известно, что сечения расслоения $\mathcal{O}([q])$ можно отождествить с голоморфными функциями на $\mathbb{C}$ с простыми нулями в точках $\{q+n+m\tau : n,m \in \mathbb{Z}\}$ и определенными модулярными свойствами, выбор которых фиксирует расслоение из класса.
Для класса $\mathcal{O}([q])$ мы фиксируем следующие модулярные свойства:

$$\begin{aligned} &f(z+1) = f(z) \\ &f(z+\tau) = \exp\Big(-\pi i\tau - 2\pi i(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-q)\Big)f(z) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Заметим, что правило (3.1) определяет коцикл для группы $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. Используя этот коцикл, мы получаем расслоение $\mathcal{S}_{\tau,q} \to C_\tau$.

Определение 3.1. *Пусть $\mathcal{S}_{\tau,q} \to C_\tau$ — расслоение над C_τ, определенное модулярными свойствами* (3.1)

Тот факт, что класс изоморфизма $\mathcal{S}_{\tau,q}$ совпадает с $\mathcal{O}([q])$, показывает следующее замечание. Пусть $\theta(z,\tau) = \theta_{00}(z,\tau)$ обозначает тэта-функцию Римана.

Замечание 3.1. *Функция $\theta^{\tau,q}(z) = \theta(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-q,\tau)$ является голоморфной на всей комплексной плоскости, имеет простые нули в точках $\{q+n+m\tau : n,m \in \mathbb{Z}\}$ и удовлетворяет* (3.1).

Функцию $\theta^{\tau,0}(z)$ будем обозначать $\theta^\tau(z)$.

Зафиксируем натуральное B. Множество классов изоморфизма голоморфных расслоений степени B также параметризуется точками кривой C_τ: точке $q \in C_\tau$ соответствует класс изоморфизма $\mathcal{O}([0])^{\otimes B-1} \otimes \mathcal{O}([q])$.

Определение 3.2. *Положим*

$$\mathcal{L}^{\tau,q} = \mathcal{S}_{\tau,0}^{\otimes B-1} \otimes \mathcal{S}_{\tau,q}$$

Расслоение $\mathcal{L}^{\tau,q}$ задается модулярными свойствами:

$$\begin{aligned} &f(z+1) = f(z) \\ &f(z+\tau) = \exp\Big(-\pi iB\tau - 2\pi iB(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-\frac{q}{B})\Big)f(z) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для дальнейших целей нам понадобится ввести базис глобальных сечений этого расслоения.

Лемма 3.1. *Функции $\theta_{k,\tau,q}, k = 0, ..., B-1$:*

$$\theta_{k,\tau,q}(z) = \theta(Bz + \frac{B}{2} + \frac{B\tau}{2} + k\tau - q, B\tau)\exp\Big(2\pi i k(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{q}{B})\Big) \tag{3.3}$$

образуют базис сечений $\mathcal{L}^{\tau,q}$.

Ниже мы определим действие $PSL(2,\mathbb{Z})$ на пространствах сечений $\mathcal{L}_{\tau,q}$, поднимающее действие $PSL(2,\mathbb{Z})$ на $\mathfrak{h}\times\mathbb{C}$. Заметим, что такое поднятие не единственно, и дальнейшие результаты, представленные в работе, существенно опираются на правильный выбор этого поднятия.

Для $\tau\in\mathfrak{h}$ и $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, кривые $\mathcal{C}_\tau$ и $\mathcal{C}_{\gamma\tau}$ отождествляются отображением

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_\tau \longrightarrow \mathcal{C}_{\gamma\tau}\\ z + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \longmapsto \frac{z}{c\tau + d} + \mathbb{Z} + \gamma\tau\mathbb{Z}\end{gathered}$$

Так как

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \gamma\tau\mathbb{Z} = (c\tau + d)\mathbb{C}/\big((c\tau + d)\mathbb{Z} + (a\tau + b)\mathbb{Z}\big) = (c\tau + d)\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z},$$

то это корректно определенный изоморфизм.

Следовательно, если $f(z)$ представляет (голоморфное) сечение $\mathcal{L}^{\gamma\tau,\gamma q}$, то с точностью до голоморфного калибровочного преобразования $f(\frac{z}{c\tau+d})$ представляет (голоморфное) сечение $\mathcal{L}^{\tau,q}$, где $\gamma q = \frac{q}{c\tau+d}$. Заметим, что соответствующее калибровочное преобразование можно осуществить с помощью функции (напомним, что $\theta^\tau = \theta^{\tau,0}$ (см. 3.1)):

$$\tilde{\beta}^{\tau,q}_\gamma(z) = \left(\frac{\theta^\tau(z)}{\theta^{\gamma\tau}(\frac{z}{c\tau+d})}\right)^{B-1} \frac{\theta^{\tau,q}(z)}{\theta^{\gamma\tau,\gamma q}(\frac{z}{c\tau+d})},$$

а также любой функции, пропорциональной $\tilde{\beta}^{\tau,q}_\gamma$. Действительно, это нигде не нулевая голоморфная функция, притом $f(\frac{z}{c\tau+d})\tilde{\beta}_{\tau,q,\gamma}$ удовлетворяет (3.2) с параметрами τ, q, если $f(z)$ удовлетворяет (3.2) с параметрами $\gamma\tau, \gamma q$. Тот факт, что $\tilde{\beta}^{\tau,q}_\gamma$ определена с точностью до ненулевого множителя приводит к тому, что действие $PSL(2,\mathbb{Z})$ на пространствах сечений $\mathcal{L}^{\gamma,\tau}$ определено с точностью до некоторого коцикла. Для того, чтобы впоследствии построить голоморфную модель P', нам нужно выбрать следующее калибровочное преобразование

$$\beta^{\tau,q}_\gamma(z) = \left(\frac{\theta^\tau(z)}{\theta^{\gamma\tau}(\frac{z}{c\tau+d})}\frac{\theta'_{11}(0,\gamma\tau)}{(c\tau+d)\theta'_{11}(0,\tau)}\right)^{B-1} \frac{\theta^{\tau,q}(z)}{\theta^{\gamma\tau,\gamma q}(\frac{z}{c\tau+d})}\frac{\theta_{11}(\gamma q,\gamma\tau)}{\theta_{11}(q,\tau)} \tag{3.4}$$

Необходимость такого выбора будет видна при доказательстве предложения 4.1.

Таким образом, оператор

$$\begin{aligned} &W^{\tau,q}_\gamma : \Gamma(\mathcal{L}^{\gamma\tau,\gamma q}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}^{\tau,q}) \\ &f(z) \longmapsto f(\frac{z}{c\tau+d})\left(\frac{\theta^\tau(z)}{\theta^{\gamma\tau}(\frac{z}{c\tau+d})}\frac{\theta'_{11}(0,\gamma\tau)}{(c\tau+d)\theta'_{11}(0,\tau)}\right)^{B-1} \frac{\theta^{\tau,q}(z)}{\theta^{\gamma\tau,\gamma q}(\frac{z}{c\tau+d})}\frac{\theta_{11}(\gamma q,\gamma\tau)}{\theta_{11}(q,\tau)}\end{aligned} \tag{3.5}$$

отождествляет пространства сечений $\mathcal{L}^{\tau,q}$ и $\mathcal{L}^{\gamma\tau,\gamma q}$.

3.3 Голоморфные версии P, $\mathcal{P}$, E и $\mathcal{E}$ расслоений P', $\mathcal{P}'$, E' и $\mathcal{E}'$

Мы определим расслоение P аналогично тому, как определили P' (см. Определение 2.2): пусть сначала P обозначает пучок $\mathbb{C}$-векторных пространств на $\mathfrak{h}\times\mathbb{C}$, сечениями которого над $U\times V\subset\mathfrak{h}\times\mathbb{C}$ являются C^∞-функции $F:\mathbb{C}\times\mathfrak{h}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющие следующим свойсвам:

- $F(\cdot,\tau,q)$ удовлетворяют (3.1);
- $F(z,\tau,q)$ голоморфно по τ и q при всяком фиксированном z.

Нетрудно видеь, что P естественным образом доопределяется до локального свободного пучка модулей над пучком голоморфных функций на $\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$. Индуцированное вектороное расслоение (бесконечного ранга) будем обозначать также через P.

Пусть также $\mathcal{P} \subset P$ — голоморфное векторное подрасслоение, слоем которого в точке (τ, q) является пространство голоморфных сечений $\mathcal{L}^{\tau,q}$. Заметим, что $\mathrm{rk}\mathcal{P} = B$.

Операторы $W_\gamma^{\tau,q}$ образуют коцикл для группы $PSL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$, действующий на P и $\mathcal{P}$. Обозначим через E и $\mathcal{E}$ голоморфные векторные расслоения на $\mathcal{M}_{1,2}$, получающиеся как фактор P и $\mathcal{P}$ относительно этого действия.

4 Изоморфизм между голоморфной и C^∞-пространствами модулей основных состояний

Лемма 4.1. *$\mathcal{L}^{\tau,q}$ и L^τ изоморфны как $C^\infty-$расслоения:*

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{L}^{\tau,q}) &\xrightarrow{\phi_{\tau,q}} \Gamma(L^\tau) \\ f &\longmapsto f \cdot h_{\tau,q} \end{aligned}$$

где

$$h_{\tau,q}(z) = e^{-2\pi i B(\frac{1}{2}+\frac{q}{B})(y+\frac{1}{2})+\pi i B\tau(y+\frac{1}{2})^2} \tag{4.1}$$

Доказательство. Функция $h_{\tau,q}(z)$ удовлетворяет модулярным условиям

$$\begin{aligned} h_{\tau,q}(z+1) &= h_{\tau,q}(z) \\ h_{\tau,q}(z+\tau) &= \exp\left[-2\pi i Bx + 2\pi i B\tau + 2\pi i B(z + \frac{1}{2} + \frac{q}{B})\right] \end{aligned}$$

Поэтому, если f удовлетворяет (3.2), то $f \cdot h_{\tau,q}$ удовлетворяет (2.2). ☐

Этот изоморфизм позволяет определить метрику на $\mathcal{L}^{\tau,q}$: для $f, g \in \Gamma(\mathcal{L}^{\tau,q})$

$$(f(z), g(z))_{\tau,q} = |h_{\tau,q}(z)|^2 \bar{f}(z) g(z) \tag{4.2}$$

Предложение 4.1. *Расслоения E и E' изоморфны.*

Доказательство. Операторы $\phi_{\tau,q}$ задают изоморфизм

$$\phi : P \longrightarrow P'$$

Необходимо показать, что действие $PSL(2,\mathbb{Z})$ коммутирует с ϕ, то есть проверить тождество:

$$\frac{h_{\tau,q}(z)}{h_{\gamma\tau,\gamma q}(\gamma z)} \beta_\gamma^{\tau,q}(z) = \exp\left[\pi i B\big((x'+1)(y'+1) - (x+1)(y+1)\big)\right]$$

где

$$\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= -cx + dy \end{aligned}$$

Это достаточно доказать для образующих $PSL(2,\mathbb{Z})$.
Непосредественные вычисления показывают, что
для $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{h_{\tau,q}(z)}{h_{\gamma\tau,\gamma q}(\gamma z)} \beta_\gamma^{\tau,q}(z) = \exp(-\pi i B y(y+1))$$

если $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\frac{h_{\tau,q}(z)}{h_{\gamma\tau,\gamma q}(\gamma z)}\beta_\gamma^{\tau,q}(z) = \exp(-2\pi i B x(y+1))$$

Индуцированный изоморфизм

$$\phi : E \longrightarrow E' \tag{4.3}$$

также будем обозначать ϕ. □

Следствие 4.1. *Семейство метрик $h_{\tau,q}$ на $\mathcal{L}^{\tau,q}$ согласовано с действием $PSL(2,\mathbb{Z})$.*

В следующем разделе мы покажем, что ϕ индуцирует изоморфизм подрасслоений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ (Предложение 5.2).

5 Голоморфная версия гамильтониана

Как мы показали в Разделе 4, существует естественный C^∞-изоморфизм между расслоениями $\mathcal{L}^{\tau,q}$ и L^τ, в частности, сечения $\mathcal{L}^{\tau,q}$ можно называть голоморфными версиями волновых функций. Продолжая эту аналогию, мы построим голоморфный гамильтониан, соответствующий относительно вышеупомянутого изоморфизма тому, что возникает в физической задаче. Как мы увидим ниже, голомофрный гамильтониан есть ни что иное, как лапласиан в естественной метрике на $\mathcal{L}^{\tau,q}$.

5.1 Эрмитова связность в $\mathcal{L}^{\tau,q}$

Метрика $h_{\tau,q}$ на $\mathcal{L}^{\tau,q}$ и голоморфная структура снабжают это расслоение естественной эрмитовой связностью $\nabla^{\tau,q}$. Найдем явный вид $\nabla^{\tau,q}$, используя произвольное локальное голоморфное сечение.

Предложение 5.1. *Пусть локальное голоморфное сечение $\mathcal{L}^{\tau,q}$ представлено в выбранной тривиализации голоморфной функцией e. Тогда 1 - форма связности $\nabla^{\tau,q}$, соответствующая e, имеет такой вид:*

$$\omega_e^{\tau,q} = (\partial_z \log(e) + \partial_z \log\left(|h_{\tau,q}|^2\right))dz = (\partial_z \log(e) + 2\pi i B(y + \frac{\phi_1}{B}))dz$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой

$$\omega_u = \partial h^u (h^u)^{-1}, \quad h^u_{ij} = (u_i, u_j) \tag{5.1}$$

для 1 - формы эрмитовой связности в локальном голоморфном репере $\{u_i\}$ эрмитова векторного расслоения. □

5.2 Лапласиан в $\mathcal{L}^{\tau,q}$

Введем обозначение

$$\left(\nabla^{\tau,q}\right)^{1,0} = \partial^{\tau,q}$$
$$\left(\nabla^{\tau,q}\right)^{0,1} = \bar\partial^{\tau,q}$$

Эрмитова связность на $\mathcal{L}^{\tau,q}$ и метрика на $\mathcal{C}_\tau$ позволяют определить $\bar\partial-$лапласиан:

$$\Delta_{\bar\partial}^{\tau,q} = \left(\bar\partial^{\tau,q}\right)^* \circ \bar\partial^{\tau,q} : \Gamma(\mathcal{L}_{\tau,q}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}_{\tau,q} \otimes \Omega^1) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}_{\tau,q})$$

где

$$\left(\bar\partial^{\tau,q}\right)^* = - * \partial^{\tau,q} *$$

С помощью изоморфизма $\phi_{\tau,q}$ оператор $\Delta_{\bar\partial}^{\tau,q}$ переносится на L^τ.
Индуцированный оператор на L^τ будем обозначать $\phi_{\tau,q}^* \Delta_{\bar\partial}^{\tau,q}$.

Лемма 5.1. *При замене координат:*

$$\begin{aligned} C_i &\longrightarrow C_\tau \\ x+iy &\longmapsto x+\tau y \end{aligned} \tag{5.2}$$

$\phi^*_{\tau,q}\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial}$ *имеет следующий вид:*

$$\phi^*_{\tau,q}\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial} = H_{\tau,q} - \frac{\pi B}{V}$$

где

$$\begin{aligned} H_{\tau,q} &= \frac{1}{V\tau_2}\big(|\tau|^2 D_x^2 - \tau_1(D_xD_y + D_yD_x) + D_y^2\big) \\ D_x &= -i\partial_x + 2\pi By + 2\pi(\phi_1 + \frac{B}{2}) \\ D_y &= -i\partial_y + 2\pi(\phi_2 + \frac{B}{2}) \end{aligned}$$

Доказательство. Найдем явный вид $\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial}$, используя локальное голоморфное сечение e.
Пусть σ — локальное сечение $\mathcal{L}^{\tau,q}$, тогда $\sigma = \alpha e$, где $\alpha-$гладкая функция.

$$\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial}\sigma = \bar\partial^*\bar\partial(\alpha e) = -*\partial^{\tau,q}*(\frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}d\bar z\otimes e) = -i*\partial^{\tau,q}(\frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}d\bar z\otimes e) = -i*(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial\bar z}dz\wedge d\bar z - \frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}d\bar z\wedge\omega_e^{\tau,q})\otimes e =$$
$$-i*(\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial\bar z}dz\wedge d\bar z - \frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}\big(\partial_z\log(e) + \partial_z\log\big(|h_{\tau,q}|^2\big)\big)d\bar z\wedge dz)\otimes e =$$
$$-\frac{2\tau_2}{V}\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial\bar z} + \frac{\partial\alpha}{\partial\bar z}\big(\partial_z\log(e) + \partial_z\log\big(|h_{\tau,q}|^2\big)\big)\right]e$$

Действие $\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial}$ на сечение $\psi = \alpha e h_{\tau,q}$ расслоения L^τ выглядит так:

$$\phi^*_{\tau,q}\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial}\psi = -\frac{2\tau_2}{V}\left[\partial^2_{z\bar z}\psi - \partial_z\psi\partial_{\bar z}\log(h_{\tau,q}) + \partial_{\bar z}\psi\partial_z\log\big(\bar h_{\tau,q}\big) - \psi\big(\partial^2_{z\bar z}\log(h_{\tau,q}) + \partial_{\bar z}\log(h_{\tau,q})\partial_z\log\big(\bar h_{\tau,q}\big)\big)\right]$$

Нетрудно найти преобразование для ∂_z и $\partial_{\bar z}$ при замене координат (5.2):

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{i}{2\tau_2}(\bar\tau\partial_x - \partial_y) \\ \partial_{\bar z} &= \frac{i}{2\tau_2}(-\tau\partial_x + \partial_y) \\ \partial^2_{z\bar z} &= \frac{1}{4\tau_2^2}(|\tau|^2\partial^2_{xx} - 2\tau_1\partial^2_{xy} + \partial^2_{yy}) \end{aligned}$$

В этих координатах $\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial}$ имеет вид:

$$\phi^*_{\tau,q}\Delta^{\tau,q}_{\bar\partial} = H_{\tau,q} - \frac{\pi B}{V}$$

где

$$H_{\tau,q} = \frac{1}{2V\tau_2}\big(|\tau|^2 D_x^2 - \tau_1(D_xD_y + D_yD_x) + D_y^2\big) \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} D_x &= -i\partial_x + 2\pi B(y + \frac{1}{2} + \frac{\phi_1}{B}) \\ D_y &= -i\partial_y + 2\pi B(\frac{1}{2} + \frac{\phi_2}{B}) \end{aligned}$$

□

Напомним, что мы определили изоморфизм ϕ (4.3) векторных расслоений E и E' (см. Раздел 3.3), содержащих подрасслоение голоморфных сечений $\mathcal{E}$ и подрасслоение основных состояний $\mathcal{E}'$ соответственно. Предыдущая лемма показывает, что ϕ переводит $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$.

Предложение 5.2. *$\phi : E \longrightarrow E'$ индуцирует C^∞-изоморфизм подрасслоений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$.*

Доказательство. Действительно, слой $\mathcal{E}$ над $(\tau, q) \in \mathcal{M}_{1,2}$ является подпространством голоморфных сечений $\mathcal{L}^{\tau,q}$ пространства C^∞-сечений $\mathcal{L}^{\tau,q}$. Голоморфные сечения – это в точности ядро $\Delta_{\bar{\partial}}^{\tau,q}$, при изоморфизме ϕ оно соответствует ядру $\phi^*\Delta_{\bar{\partial}}^{\tau,q}$, то есть собственному подпространству $H_{\tau,q}$, соответствующему собственному значению $\frac{\pi B}{V}$, которое, по определению, есть слой $\mathcal{E}'$ над (τ, q). □

Следствие 5.1. *Наименьшее собственное значение E гамильтониана $H_{\tau,q}$ равно $\frac{\pi B}{V}$, притом соответствующее собственное подпространство имеет размерность B.*

Доказательство. Из предложения 5.2 следует, что размерность собственного подпространства $H_{\tau,q}$, соответствующего собственному числу $\frac{\pi B}{V}$, равна размерности глобальных сечений расслоения $\mathcal{L}_{\tau,q}$, что равно B по теореме Римана–Роха. Так как $\bar{\partial}$-лапласиан $\Delta_{\bar{\partial}}^{\tau,q}$ положительно определен, то оператор $\phi^*_{\tau,q}\Delta_{\bar{\partial}}^{\tau,q} = H_{\tau,q} - \frac{\pi B}{V}$ положительно определен, поэтому $\frac{\pi B}{V}$ — наименьшее собственное значение $H_{\tau,q}$. □

Функции $\theta_{k,\tau,q}$ (3.3) образуют локальный голоморфный репер в $\mathcal{E}$. Полезно получить явный вид соответствующих (при изоморфизме ϕ) локальных сечений $\mathcal{E}'$.

Предложение 5.3. *Функции $\theta_{k,\tau,q}$ при изоморфизме $\Gamma(\mathcal{L}^{\tau,q}) \cong \Gamma(L^\tau) \cong \Gamma(L^i)$ соответствуют функциям*

$$
\begin{gathered}
g_{k,\tau,q}(x,y) = e^{-\pi i\tau\frac{k^2}{B} + 2\pi i\phi_1(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B}) - \pi i\tau\frac{\phi_1^2}{B}} \cdot \\
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi iB\tau(y+\frac{1}{2}+\frac{k}{B}+\frac{\phi_1}{B}+n)^2 - 2\pi iB(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B})(y+\frac{1}{2}+\frac{k}{B}+\frac{\phi_1}{B}+n) + 2\pi ix(nB+k)\right)
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

Таким образом, $g_{k,\tau,q}$ является базисом пространства основных состояний $H_{\tau,q}$.
Также удобно перейти к ортонормированному базису:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,\tau,q}(x,y) &= \frac{(2B\tau_2)^{1/4}}{V^{1/2}} e^{\pi i\tau\frac{k^2}{B} - 2\pi i\phi_1(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B}) + \pi i\tau\frac{\phi_1^2}{B}} g_{k,\tau}(x,y) = \\
&= \frac{(2\tau_2 B)^{1/4}}{V^{1/2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi iB\tau(y+\frac{1}{2}+\frac{k}{B}+\frac{\phi_1}{B}+n)^2 - \pi iB(y+\frac{1}{2}+\frac{k}{B}+\frac{\phi_1}{B}+n) + 2\pi ix(nB+k)\right)
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

6 Каноническая связность в $\mathcal{E}$

Семейство метрик (4.2) в $\mathcal{L}^{\tau,q}$ задает метрику в расслоении E (а значит, и на $\mathcal{E}$):

$$
\langle \eta_{\tau,q}, \nu_{\tau,q} \rangle = \int_{\mathcal{C}_\tau} dVol(g_{\tau,q})(\eta_{\tau,q}(z), \nu_{\tau,q}(z))_{\tau,q}
\tag{6.1}
$$

Она корректно определена ввиду следствия 4.1.
Таким образом, $\mathcal{E}$ является голоморфным эрмитовым расслоением.

Предложение 6.1. *1 - форма ω соответствующей эрмитовой («канонической») связности ∇ в локальном голоморфном репере $\theta_{k,\tau,q}$ имеет следующий вид:*

$$
\begin{aligned}
\omega_{kl} &= \delta_{kl}\left[(-\frac{\pi i(k^2+\phi_1^2)}{B} + \frac{i}{4\tau_2})d\tau + \frac{2\pi i\phi_1}{B}(d\phi_2 - \tau d\phi_1)\right] = \\
&= \delta_{kl}\left[(-\frac{\pi i(k^2-\phi_1^2)}{B} + \frac{i}{4\tau_2})d\tau + \frac{2\pi i\phi_1}{B}dq\right]
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Доказательство. Найдем 1 - форму ω связности ∇ используя формулу (5.1). Для начала необходимо вычислить матрицу метрики в этом базисе:

$$\langle\theta_{k,\tau,q},\theta_{l,\tau,q}\rangle = \int\limits_{\mathcal{C}_\tau} dVol(g_\tau)(\theta_{k,\tau,q}(z),\theta_{l,\tau,q}(z))_\tau = \frac{V}{\tau_2}\int\limits_{\mathcal{C}_\tau} dz_1dz_2|h_{\tau,q}(z)|^2\bar{\theta}_{k,\tau,q}(z)\theta_{l,\tau,q}(z) =$$

$$= V\int\limits_0^1\int\limits_0^1 dxdy\ \bar{g}_{k,\tau,q}(x,y)g_{l,\tau,q}(x,y) = \delta_{kl}Ve^{2\pi\tau_2\frac{k^2+\phi_1^2}{B}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^1 dy\exp\Big(-2\pi B\tau_2(y+\frac{1}{2}+\frac{k}{B}+n)^2\Big) =$$

$$= \delta_{kl}Ve^{2\pi\tau_2\frac{k^2+\phi_1^2}{B}}\int\limits_{\mathbb{R}} dy\exp\big(-2\pi B\tau_2y^2\big) = \delta_{k,l}\frac{Ve^{2\pi\tau_2\frac{k^2+\phi_1^2}{B}}}{\sqrt{2B\tau_2}}$$

Отсюда просто найти ω:

$$\omega_{kl} = \delta_{kl}\ \partial\log\left(\frac{Ve^{2\pi\tau_2\frac{k^2+\phi_1^2}{B}}}{\sqrt{2B\tau_2}}\right) = \delta_{kl}\ \frac{1}{2}(\partial_{\tau_1}-i\partial_{\tau_2})(2\pi\tau_2\frac{k^2+\phi_1^2}{B}-\frac{1}{2}\log(\tau_2))d\tau+$$

$$\delta_{kl}\ \frac{1}{2}(\partial_{\phi_2}+i(\frac{\tau_1}{\tau_2}\partial_{\phi_2}+\frac{1}{\tau_2}\partial_{\phi_1}))(2\pi\tau_2\frac{k^2+\phi_1^2}{B}-\frac{1}{2}\log(\tau_2))(d\phi_2-\tau d\phi_1) =$$

$$\delta_{kl}\left[(-\frac{\pi i(k^2+\phi_1^2)}{B}+\frac{i}{4\tau_2})d\tau+\frac{2\pi i\phi_1}{B}(d\phi_2-\tau d\phi_1)\right]$$

□

Для дальнейшего полезно также найти 1 - форму канонической связности в ортонормированном базисе.

Лемма 6.1. *Матрица канонической связности в базисе $\varphi_{k,\tau,q}$ (см. (5.5)) равна*

$$\omega_{\varphi,kl} = \delta_{kl}(\frac{i}{4\tau_2}d\tau_1-2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B})d\phi_1) \tag{6.3}$$

Доказательство. Для локального сечения $f=\sum\limits_k c_k\varphi_k$:

$$\nabla f = \sum_k\Big(d(c_k\frac{(2B\tau_2)^{1/4}}{V^{1/2}}e^{\pi i\tau\frac{k^2}{B}-2\pi i\phi_1(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B})+\pi i\tau\frac{\phi_1^2}{B}})g_{k,\tau}+\sum_j c_j\omega_{jk}\varphi_{k,\tau}\Big) =$$

$$\sum_k(dc_k+c_k(\frac{i}{4\tau_2}d\tau_1-2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B})d\phi_1)\varphi_{k,\tau},$$

откуда получаем требуемое. □

7 Голономия канонической связности

Мы определили голоморфное векторное расслоение $\mathcal{E}$ (см. Раздел 3.3) над пространством модулей $\mathcal{M}_{1,2}$ и задали в нем эрмитову метрику (6.1). Представляет интерес вычисление голономии соответствующей канонической связности (6.2) вдоль различных петель в $\mathcal{M}_{1,2}$. Мы найдем матрицу оператора голономии в базисе (3.3).

7.1 Голономия вдоль петли вокруг проколотой точки в $\mathcal{M}_{1,1}$

Рассмотрим петлю

$$\begin{aligned}\gamma:[0,1]&\longrightarrow\mathcal{M}_{1,2}\\ t&\longmapsto(t-1/2+i\tau_2,q)\end{aligned}$$

для $\tau_2 > 1$.

Найдем преобразование $\theta_{k,-1/2+i\tau_2,q}$ при параллельном переносе вдоль γ. Пусть

$$\sigma(t) = \sum_j c_j(t)\theta_{j,\gamma(t)}$$

– параллельный перенос $\theta_{k,-1/2+i\tau_2,q}$ за время t. Тогда

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma'}\sigma = 0 \\ \sigma(0) = \theta_{k,-1/2+i\tau_2,q} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{c}_j = c_j(\frac{\pi i(k^2-\phi_1^2)}{B} - \frac{i}{4\tau_2}) \\ c_j(0) = \delta_{j,k} \end{cases}$$

Откуда

$$\sigma(t) = \theta_{k,\gamma(t)} e^{i(\frac{\pi(k^2-\phi_1^2)}{B} - \frac{1}{4\tau_2})t}$$
$$\sigma(1) = \theta_{k,1/2+i\tau_2,q} e^{i(\frac{\pi(k^2-\phi_1^2)}{B} - \frac{1}{4\tau_2})}$$

Перенесенный вектор равен

$$W_\gamma^{-1/2+i\tau_2,q}(\sigma(1)) = e^{i(\frac{\pi B}{4} + \frac{\pi(k^2-\phi_1^2)}{B} - \frac{1}{4\tau_2})}\theta_{k,1/2+i\tau_2,q}(z) = e^{i(\frac{\pi B}{4} + \pi k + \frac{\pi(k^2-\phi_1^2)}{B} - \frac{1}{4\tau_2})}\theta_{k,-1/2+i\tau_2,q}(z) =$$
$$= e^{i(\pi B(\frac{1}{2} + \frac{k}{B})^2 - \frac{\pi\phi_1^2}{B} - \frac{1}{4\tau_2})}\sigma(0)$$

Тогда матрица оператора голономии $A_\gamma^{-1/2+i\tau_2,q}$ в базисе $\theta_{k,-1/2+i\tau_2,q}$ имеет вид

$$(A_\gamma^{-1/2+i\tau_2,q})_{ik} = \delta_{ik}\exp\left[i(\pi B(\frac{1}{2} + \frac{k}{B})^2 - \frac{\pi\phi_1^2}{B} - \frac{1}{4\tau_2})\right] \tag{7.1}$$

7.2 Голономия вдоль образующих C_τ

7.2.1 Горизонтальная образующая

Рассмотрим петлю

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathcal{M}_{1,2} \\ t &\longmapsto (\tau, t - \tau\phi_1) \end{aligned}$$

Найдем преобразование $\theta_{k,\tau,-\tau\phi_1}$ при параллельном переносе вдоль γ. Пусть

$$\sigma(t) = \sum_j c_j(t)\theta_{j,\gamma(t)}$$

– параллельный перенос $\theta_{\tau,-\tau\phi_1}$ за время t. Тогда

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma'}\sigma = 0 \\ \sigma(0) = \theta_{k,\tau,-\tau\phi_1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{c}_j = -\frac{2\pi i\phi_1}{B}c_j \\ c_j(0) = \delta_{j,k} \end{cases}$$

Откуда

$$\sigma(t) = \theta_{k,\gamma(t)} e^{-\frac{2\pi i\phi_1}{B}t}$$
$$\sigma(1) = \theta_{\tau,1-\tau\phi_1} e^{-\frac{2\pi i\phi_1}{B}}$$

Перенесенный вектор равен

$$\sigma(1) = e^{-\frac{2\pi i\phi_1}{B}}\theta_{k,\tau,1-\tau\phi_1}(z) = e^{-\frac{2\pi i(k+\phi_1)}{B}}\theta_{k,\tau,-\tau\phi_1}(z) = e^{-\frac{2\pi i(k+\phi_1)}{B}}\sigma(0)$$

Тогда матрица оператора голономии $A_\gamma^{\tau,1-\tau\phi_1}$ в базисе $\theta_{k,\tau,-\tau\phi_1}$ имеет вид

$$(A_\gamma^{\tau,1-\tau\phi_1})_{ik} = \delta_{ik}\exp\left[-\frac{2\pi i(k+\phi_1)}{B}\right] \tag{7.2}$$

7.2.2 Образующая, параллельная τ

Теперь рассмотрим такую петлю

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathcal{M}_{1,2} \\ t &\longmapsto (\tau, \phi_2 - \tau t) \end{aligned}$$

Найдем преобразование θ_{k,τ,ϕ_2} при параллельном переносе вдоль γ. Пусть

$$\sigma(t) = \sum_j c_j(t)\theta_{j,\gamma(t)}$$

– параллельный перенос $\theta_{\tau,-\phi_2}$ за время t. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\gamma'}\sigma = 0 \\ \sigma(0) = \theta_{k,\tau,\phi_2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{c}_j = \frac{2\pi i\tau}{B}tc_j \\ c_j(0) = \delta_{j,k} \end{array} \right.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \theta_{k,\gamma(t)}e^{\frac{\pi i\tau}{B}t^2} \\ \sigma(1) &= \theta_{k,\phi_2-\tau}e^{\frac{\pi i\tau}{B}} \end{aligned}$$

Перенесенный вектор равен

$$\sigma(1) = e^{\frac{\pi i\tau}{B}}\theta_{k,\tau,\phi_2-\tau}(z) = e^{\frac{2\pi i\tau}{B}(\frac{1}{2}+k)}\theta_{k+1,\tau,\phi_2}(z)$$

Тогда матрица оператора голономии $A_\gamma^{\tau,\phi_2-\tau t}$ в базисе θ_{k,τ,ϕ_2} имеет вид

$$(A_\gamma^{\tau,\phi_2-\tau t})_{ik} = \delta_{i,k+1}\exp\left[\frac{2\pi i\tau}{B}(\frac{1}{2}+k)\right] \tag{7.3}$$

8 Соответствие между адиабатической связностью и канонической связностью в $\mathcal{E}$. Доказательство основной теоремы

Напомним, что мы определили адиабатическую связность (см. Раздел 2.1) и задали ортонормированный базис $\varphi_{k,\tau,q}$ (см. (5.5)) в расслоении основных состояний (см. 2.5). Вычислим 1-форму связности в этом базисе.

Лемма 8.1. *Матрица адиабатической связности в ортонормированном базисе $\varphi_{k,\tau,q}$ равна*

$$\omega^a_{\varphi,kl} = \delta_{kl}(\frac{i}{4\tau_2}d\tau_1 - 2\pi i(\frac{1}{2}+\frac{\phi_2}{B})d\phi_1) \tag{8.1}$$

Доказательство. Действие ∇_a на произвольное сечение L^i:

$$\nabla\psi = Pr\ d\psi$$

где $P = \sum\limits_{l=0}^{B-1} |\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|$ – оператор проекции на собственное подпространство H_τ,
$d\psi = \partial_{\tau_1}\psi d\tau_1 + \partial_{\tau_2}\psi d\tau_2$.

$$\nabla\psi = \sum_{l=0}^{B-1}|\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|\, d(\sum_{k=0}^{B-1}c_k|\varphi_k\rangle) = \sum_{k,l=0}^{B-1}|\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|\,(dc_k|\varphi_k\rangle + c_k|d\varphi_k\rangle) = \sum_{l=0}^{B-1}(dc_l + \sum_{k=0}^{B-1}c_k\omega^a_{\varphi,kl})\,|\varphi_l\rangle$$

где $\omega^a_{\varphi,kl} = \langle\varphi_l|d\varphi_k\rangle$ – матрица связности.
Заметим, что $\omega^a_{\varphi,kl}$ диагональна:

$$\langle\varphi_l|d\varphi_k\rangle = (2\tau_2 B)^{1/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\int_0^1\int_0^1 dxdy\ \bar{\gamma}_{l,n}d\gamma_{k,m} = (2\tau_2 B)^{1/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\int_0^1 dy ... \int_0^1 dx\ e^{2i\pi((m-n)B+k-l)x}$$

Так как $k, l \in \{0, ..., B-1\}$, то $|k-l| < B|m-n|$ при $m \neq n$, а значит $(m-n)B + k - l \neq 0$ (то есть $\int\limits_0^1 dx\ e^{2i\pi((m-n)B+k-l)x} = 0$) при $k \neq l$ и любых $m, n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\langle\varphi_l|d\varphi_k\rangle = 0$, если $k \neq l$.
Вычислим диагональные элементы.

$$\langle\varphi_l|\partial_{\tau_1}\varphi_l\rangle = \pi i B(2\tau_2 B)^{1/2}\int_{\infty}^{\infty} dy\ y^2 e^{-2\pi\tau_2 B y^2} = \pi i B(2\tau_2 B)^{1/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2(2\pi\tau_2 B)^{3/2}} = \frac{i}{4\tau_2}$$

$$\langle\varphi_l|\partial_{\tau_2}\varphi_l\rangle = (2\tau_2 B)^{1/4}\frac{B/2}{(2\tau_2 B)^{-3/4}}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 dxdy\ \bar{\gamma}_{l,n}\gamma_{l,m} +$$

$$(2\tau_2 B)^{1/2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 dxdy\ (-\pi B(\tilde{y}_l + m)^2)\bar{\gamma}_{l,n}\gamma_{l,m} = \frac{1}{4\tau_2} - \frac{1}{4\tau_2} = 0$$

$$\langle\varphi_l|\partial_{\phi_1}\varphi_l\rangle = 2i\pi(2\tau_2 B)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\ (\tau y - \phi_2/B - 1/2)e^{-2\pi\tau_2 B y^2} = -2\pi i(\frac{1}{2} + \frac{\phi_2}{B})$$

$$\langle\varphi_l|\partial_{\phi_2}\varphi_l\rangle = -2i\pi(2\tau_2 B)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\ y e^{-2\pi\tau_2 B y^2} = 0$$

Это дает матрицу связности (8.1). ☐

Теорема 8.1. *Адиабатическая и каноническая связности совпадают.*

Доказательство. Действительно, достаточно сравнить формулы (8.1) и (6.3). ☐

Следствие 8.1. *Адиабатическая связность инвариантна относительно действия $PSL(2, \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Так как каноническая связность определена глобально, утверждение тривиально следует из теоремы 8.1. ☐

8.1 Кривизна адиабатической связности

Для $U(1)-$расслоения форма кривизны связности − это просто дифференциал 1 - формы связности:

$$\Omega^a_{kl} = d\omega^a_{\varphi,kl} = \delta_{kl}(d(\frac{i}{4\tau_2}) \wedge d\tau_1 - \frac{2\pi i}{B}d\phi_2 \wedge d\phi_1) = \delta_{kl}(\frac{i}{4\tau_2^2}d\tau_1 \wedge d\tau_2 + \frac{2\pi i}{B}d\phi_1 \wedge d\phi_2) \tag{8.2}$$

Список литературы

[1] J. E. Avron, R. Seiler, and P. G. Zograf. Viscosity of quantum hall fluids. Phys. Rev. Lett., 75:697–700, Jul 1995.

[2] Phillip A Griffiths and Joseph Harris. Principles of algebraic geometry. Wiley classics library. Wiley, New York, NY, 1994.

[3] Joe Harris and Ian Morrison. Moduli of Curves. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, first edition, 1998.

[4] Yoichi Imayoshi and Masahiko Taniguchi. An Introduction to Teichmüller Spaces. Springer-Verlag Tokyo, first edition, 1992.

[5] EM Lifshitz Lev Davidovich Landau. Quantum mechanics: non-relativistic theory. 1958.

[6] David Mumford. Tata Lectures on Theta I. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, second edition, 2007.

[7] Barry Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and berry's phase. Phys. Rev. Lett., 51:2167–2170, Dec 1983.